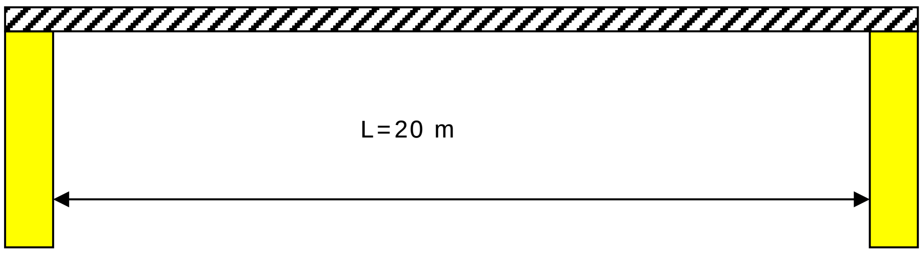
Konstruktion A
Böjning av stålbalk
Problem med fullständig lösning

I en konstruktion med stora spännvidder är det nästan bara stål som går att använda. Naturligtvis finns det andra material. Ibland bygger man idrottshallar där den bärande konstruktionen utgörs av limträ. Man kan naturligtvis också i vissa sammanhang använda sig av aluminium.

Vi skall idag räkna på en balk av stål. Denna balk kommer att utsättas för böjning från först en punktlast och sedan från en utbredd last.



U 400

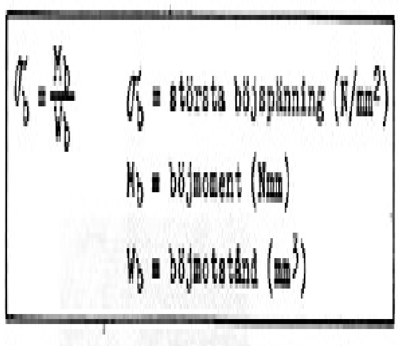
Enligt figuren ovan så kommer vi att placera en U400-balk mellan två väggar. Spännvidden mellan väggarna är 20 meter. U-balkens läge är som i figuren, dvs ”benen” åt sidan.
Vi skall räkna ut följande:

1. Hur stor punktlast kan placeras mitt på U-balken
2. Hur stor utbredd last kan placeras på U-balken
3. Vänd U-balken så att ”benen” kommer uppåt, räkna sedan ut samma saker som enligt punkt 1 och 2.
4. För balken med ”benen” åt sidan, räkna ut hur mycket balken sjunker, böjer sig ned när maximal punktlast belastar balken mitt på.

Data för U-balkar finns att hämta på denna länk.

OBS! SE din egen formelsamling för tydliga bilder och formler !

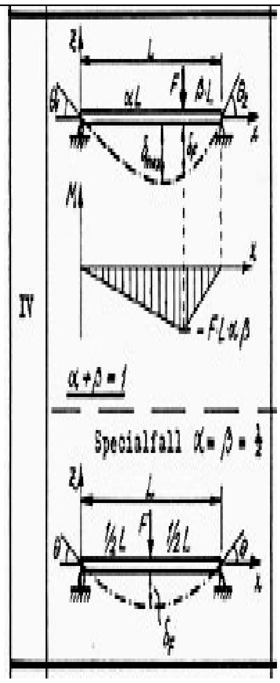
LÖSNING:

Vi börjar med punkt 1 enligt ovan. Allra först behöver vi formeln som finns här till höger. Vi börjar med spänningen, σ	

<table>
<tr>
<td>U-balken är av stål. Om vi inte vet vilket stål så måste vi ta det sämsta stålet som finns. Detta heter SS stål 1311-00, och har sträckgränsen R_e = 220 N/mm^2 och brottgränsen R_m=360 N/mm^2

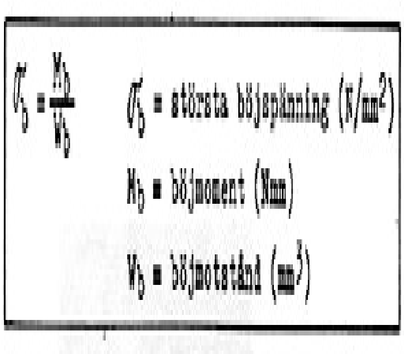
Att konstruera innebär också att tänka på risker. Vid normala konstruktioner vill man ha en säkerhetfaktor, n, som är 2 ggr jämfört med sträckgränsen.
Innebär att den tillåtna spänningen kan beräknas enligt följande:
σ_{till} = Re / n =220/2 = 110 N/mm^2</td>
<td>σ_{till} = Re / n</td>
</tr>
<tr>
<td>Böjmomentet M enligt formeln ovan måste beräknas enligt elementarfall.
Ett utdrag här till höger visar elementarfallet IV, med sitt specialfall:

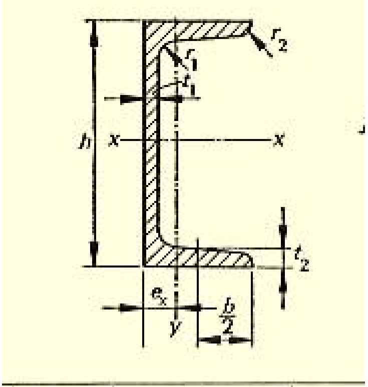
M= F*L *½*½ = F*L/4

Vi skall lite längre ned i räkningen använda denna formel.</td>
<td>

M = F*L/4</td>
</tr>
<tr>
<td>Kvar i formeln finns nu böjmotståndet W, som är ett mått på hur mycket motstånd balkens tvärsnitt gör vid böjning omkring en viss böjaxel.
För vanliga standardbalkar finns dessa värden att hämta från en tabell. För U-balken finns denna tabell här, eller som en skärmdump här till höger.

Eftersom punkt 1. enligt ovan avser en balk som är placerad på samma sätt som balken här till höger, så gäller att balken böjer omkring x-axeln och att vi därmed också vill veta värdet på W_x . Enligt tabellen blir då W=1020 cm^3.

Dock vill vi inte jobba i cm utan i mm varför vi måste omvandla cm^3 till mm^3. Från cm till mm har vi faktorn 10, men upphöjt till ^{3} innebär att vi kommer att få faktorn 1000 (10*10*10).
Alltså: W= 1020 cm^3 = 1020 000 mm^3</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>



	W_x	i_x	I_y	W_y
	cm^3	cm	cm^4	cm^3
U 400	1020	14,9	846	102

Vi skall nu sätta in våra värden i spänningsformeln:

110 = M / 1 020 000, dvs
M= 1,122 * 10^8 Nmm

$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$ σ_b = största böjspänning (N/mm^2)
M_b = böjmoment (Nmm)
W_b = böjmotstånd (mm^3)

Men M fås via formeln här till höger:

M= F*L/4

Med insatta värden får vi:

1,122 * 10^8 = F*20 000 /4

F=1,122 * 10^8 * 4/ 20 000 =22 440 N

(OBS! att 20 m = 20 000 mm)

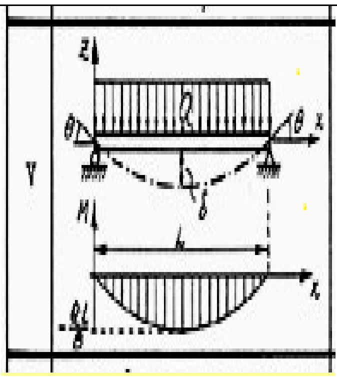
SLUTSATS:

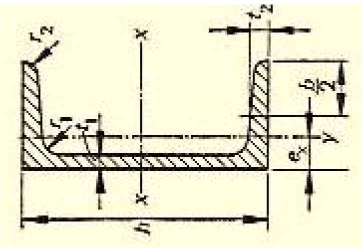
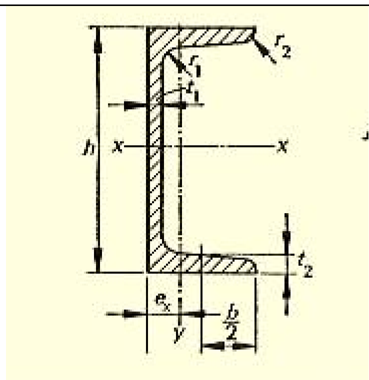
Mitt på balken kan man placera en punktlast på ca 2000 kg, vilket är ungefär lika mycket som en Volvo stadsjeep (XC90)

================================
Lösning enligt punkt 2.
Hur stor utbredd last kan placeras på U-balken ?
================================

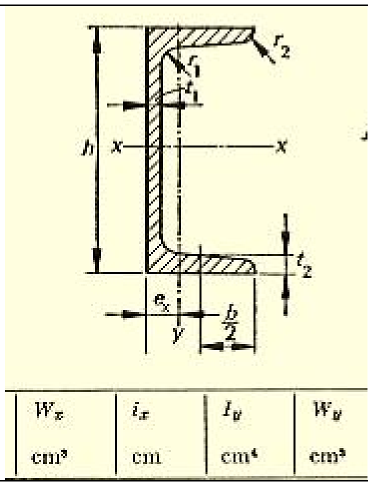
Nu gäller det att vara smart.
Vad skiljer detta problem från nr 1 ?
Jo, eftersom lasten är utbredd använder vi ett annat elementarfall: se skärmdump till höger:

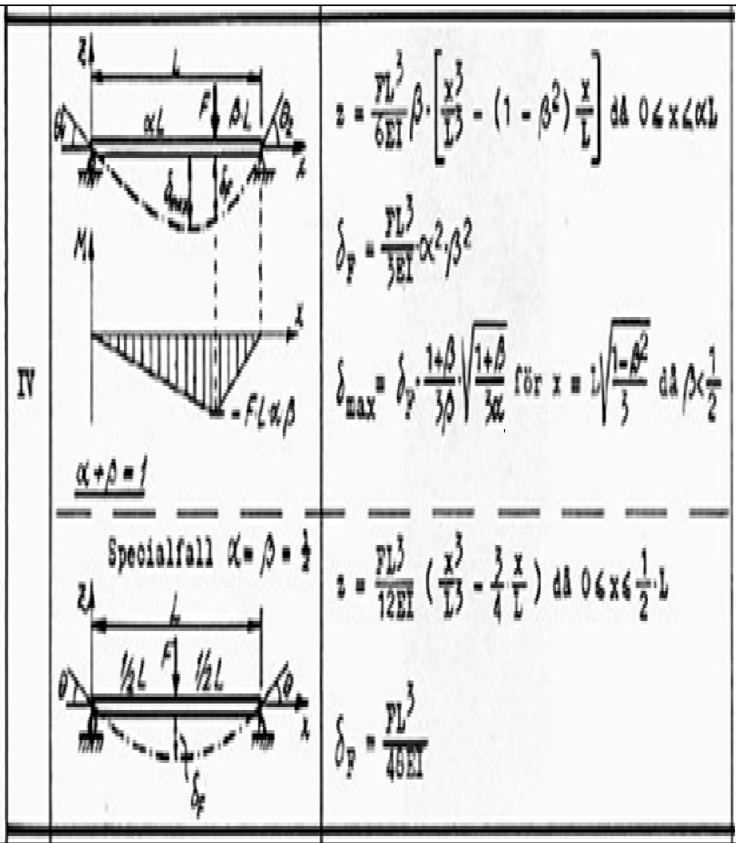
Vi ser att det som ändras är momentet M, som för elementarfall V är enligt: M=Q*L/ 8



	M=Q*L/ 8
Om vi jämför första punktens beräkning som hade M enligt M= F*L/4 Så framgår att momentet vid utbredd last är en faktor 2 ggr mindre. OBS! Att både F och Q betyder kraft, men att man brukar använda olika bokstäver för att inte blanda ihop de bägge fallen.	**Alltså:** Utbredd last: M=Q*L/ 8 Punktlast: M= F*L/4
Titta på formeln här till höger. Du bör nu kunna se att med samma värde på spänning och böjmotstånd så bör kraften vid utbredd last bli 2 ggr så stor, 2*22 440 N = 44 880 N Omräknat till kg, då ca 4000 kg **Slutsats:** 2st Volvo XC90 är möjligt om dessa smetas ut över hela balkens 20 meter.	$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$ σ_b = största böjspänning (N/mm^2) M_b = böjmoment (Nmm) W_b = böjmotstånd (mm^3)
============================ Lösning enligt punkt 3. Vänd U-balken så att ”benen” kommer uppåt, räkna sedan ut samma saker som enligt punkt 1 och 2. ============================	
Vad som händer är att balken nu vänds och därför böjer kring sin y-axel. Då ändras också värdet på böjmotståndet och vi använder tabellens W_y-värde  W_y = 102 cm^3 = 102 000 mm^3	
Om vi tittar på detta värde så är det exakt 10 ggr mindre än värdet för W_x (värdet 10 ggr gäller inte alltid, utan råkar att bli så i detta problem)	

W_x cm^3	i_x cm	I_y cm^4	W_y cm^3
1020	14,9	846	102

SLUTSATS: Är man åter igen lite klurig så inses att om W är 10 ggr mindre så måste lasten Q eller F också reduceras 10 ggr, vilket då innebär att: Vid punktlast kan man belasta med ca 200 kg och vid utbredd last med ca 400 kg	$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$ σ_b = största böjspänning (N/mm^2) M_b = böjmoment (Nmm) W_b = böjmotstånd (mm^3)
========================== **Lösning enligt punkt 4.** För balken med "benen" åt sidan, räkna ut hur mycket balken sjunker, böjer sig ned när maximal punktlast belastar balken mitt på. ==========================	
När det gäller att lösa problem som innehåller nedböjning så behöver vi veta vad man menar med elasticitetsmodul. Detta finns beskrivet i följande länk. Kort kan man säga att elasticitetsmodulen, E, är lutningen på den räta linjen i ett dragprovningsdiagram. Detta innebär att E-modulen beror av materialet. Värden på E-modulen finns i tabeller. För vanligt stål brukar man använda värdet 210 000 N/mm^2	E-modulen
Nedböjning kräver hjälp av elementarfall och vi skall åter igen hitta ett fall med punktlast mitt på en balk. Se skärmdumpen nedan !	

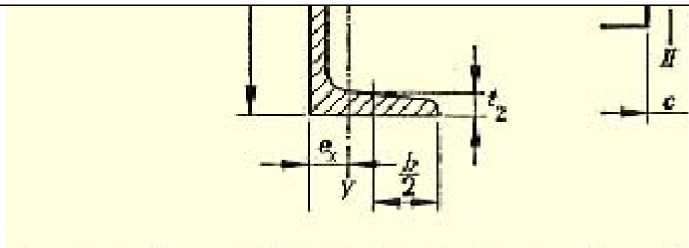


Vi har alltså valt elementarfall IV, och även nu vårt specialfall.
Om vi tittar på figuren rakt ovan, så finns det en nedböjningskurva, där man har markerat sträckan som böjs ned. Den kallas här för δ_F
Vi skall beräkna denna sträcka och kommer att använda formeln här till höger.

$$\delta_F = F*L^3 /(48*E*I)$$

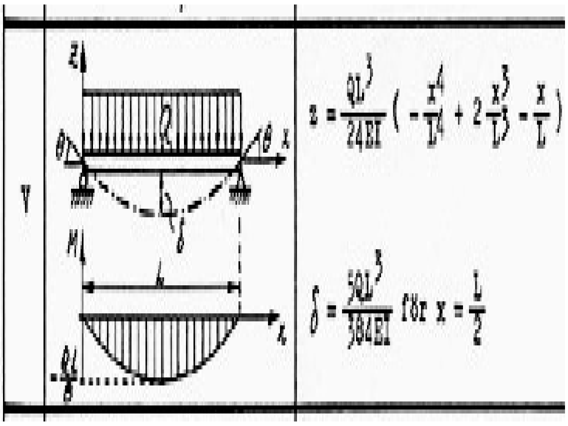
F: Kraften i Newton [N]
L: Balkens totala spännvidd i [mm]
E: Elasticitetsmodulen i [N/mm^2]
I: Trögethetsmoment [mm^4]

Tröghetsmoment enligt ovan har vi tidigare inte använt. Kort kan man säga att tröghetsmomentet är ”kusin” till böjmotståndet, W. Båda räknas fram utifrån tvärsnittets dimensioner, vilka tillsammans ger ett värde på balkens förmåga att hantera böjning.
För alla standardbalkar hämtas tröghetsmomentet från en tabell. Finns här, Skärmdump visas till höger.



	I_x cm^4	W_x cm^3	i_x cm	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm
U 400	20350	1020	14,9	846	102	3,04

Eftersom vår balk skall böjas kring x-axeln så skall vi i tabellen läsa av värdet för U400 och där under I_x. Det framgår att värdet är 20 350 cm^4. Även här så måste vi omvandla till mm, vilket då blir (10*10*10*10) eftersom cm är upphöjt till 4.

Alltså I_x = 20 350 * 10 000 = $2{,}035 \cdot 10^8$ mm^4	
I beräkningen av kraften F enligt punkten 1 ovan så fick vi värdet =22 440 N. Vidare hade vi balklängden (spännvidden) =20m = 20 000 mm. Vi avslutar med att sätta in värdena i formeln (här till höger)	$\delta_F = F*L^3 /(48*E*I)$
$\delta_F = 22\,440*20\,000^3 / (48*210\,000*2{,}035*10^8)$. Detta är en ganska komplicerad uträkning att slå på räknaren. Se upp ! δ_F = 87,5 mm	
SLUTSATS: När en U400-profil (balk) som är 20 m lång, belastas med 22 440 N (motsvarande ca 2 ton) mitt på balken, då kommer balkens mitt att sjunka ca 9 cm.	
Extra tillägg:	
Ovanstående U400-profil väger enligt tabellen 71,8 kg/m. Om vi har 20 m balk så kommer hela balken att väga 20*71,8 = 1436 kg. Denna vikt kallas för balkens EGENVIKT. Egenvikten är så stor att den på egen hand kommer att ge en nedböjning. Vi kan alltså inte bortse från egenvikten när vi tittar på nedböjningen. Nedböjning p.g.a. egenvikt fungerar som om denna vikt är utsmetad över hela balklängden. Vikten var 1436 kg, vilket ungefär motsvarar 15 000 N Om vi tittar i elementarfallstabellen så blir fall V det fall som passar in.	 $\delta = 5*Q*L^3 / (384*E*I)$
Vi skall därför räkna ut nedböjningen δ vid utbredd last enligt formeln: $\delta = 5*Q*L^3 / (384*E*I)$ med insatta siffror får vi: $\delta=5*15\,000*20\,000^3 /(384*210\,000*20\,350*10^4)$ δ = 36,6 mm Alltså: Nedböjning p.g.a. egenvikten kommer mitt på balken att bli ca 4 cm	$E_{stål}$ = 210 000 N/mm^2 I_x = 20 350 cm^4 = $20\,350*10^4$ mm^4
Tillsammans med tidigare belastning på ca 2 ton så blir då hela nedböjningen 87,5+36,6 mm = 124 mm, dvs ca 13 cm	